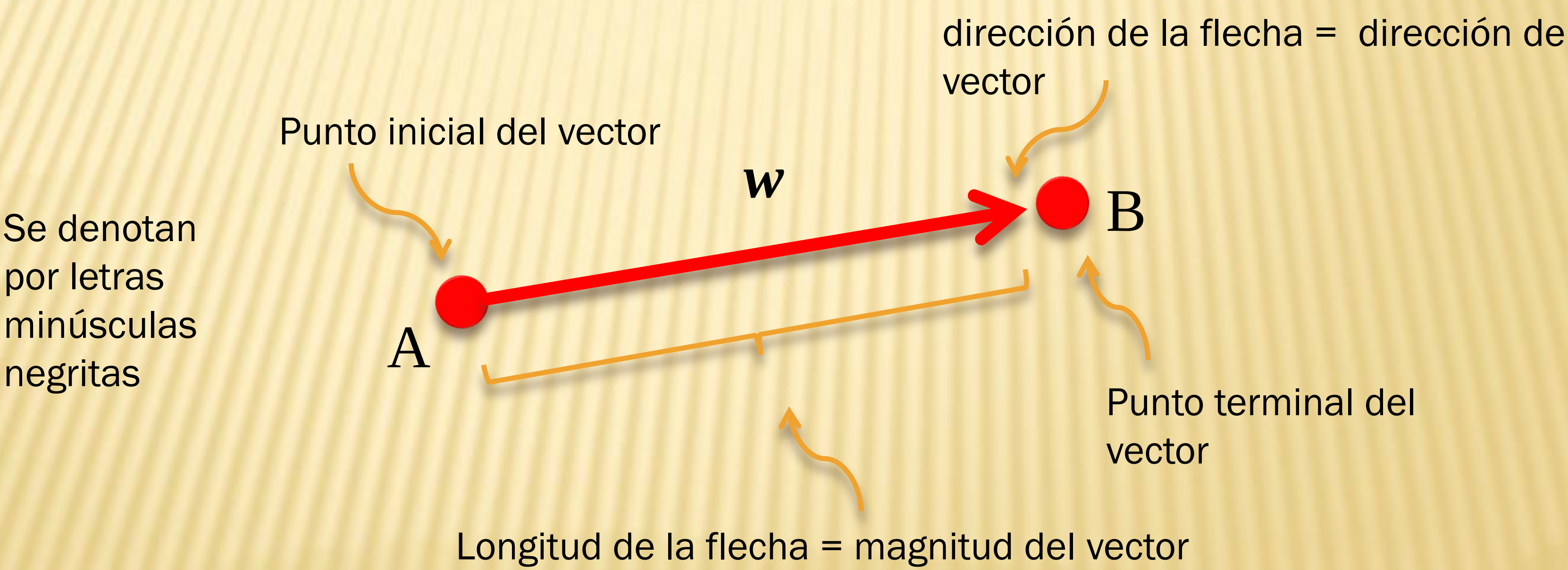
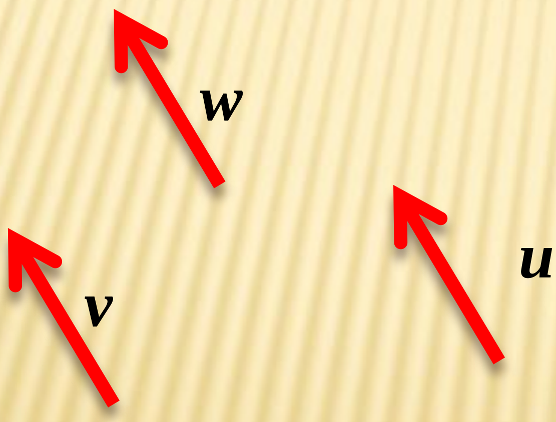
ALGEBRA Y GEOMETRÍA VECTORIAL EN R^2 Y EN R^3

- Los vectores se pueden representar mediante segmentos de recta dirigidos, o flechas, en R^2 o en R^3.



$$\boldsymbol{w} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

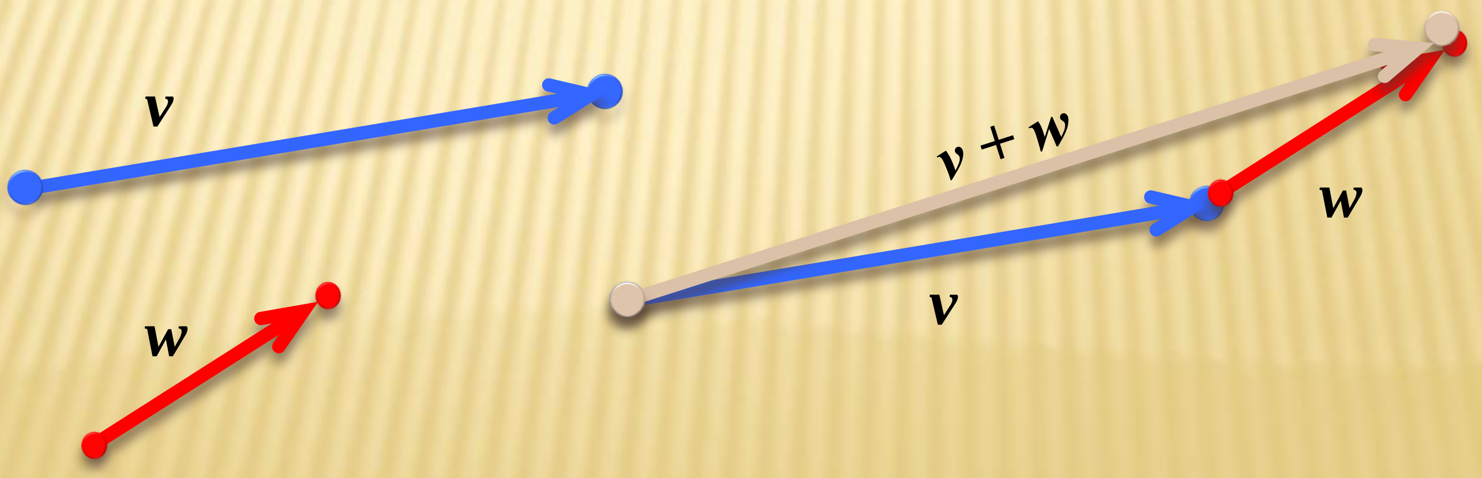
- Se dice que los vectores son "**equivalentes**" si tienen la misma magnitud y dirección.
- Se consideran vectores "**iguales**" aún cuando puedan tener posiciones diferentes.



Vectores equivalentes
$\boldsymbol{w} \cong \boldsymbol{v} \cong \boldsymbol{u}$

OPERACIONES CON VECTORES

- DEF. Si $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son dos vectores, entonces la **suma** $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ es el vector que se determina de la siguiente manera:
  - Colocar el vector $\boldsymbol{w}$ de tal manera que su punto inicial coincida con el punto terminal de $\boldsymbol{v}$.
  - El vector resultante estará representado por la flecha que va del punto inicial de $\boldsymbol{v}$ al punto terminal de $\boldsymbol{w}$



OPERACIONES CON VECTORES

- **DEF.** Al vector de longitud cero se le llama el "**vector cero**" y se denota por 0.

  Se define: $0 + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + 0 = \boldsymbol{v}$

- **DEF.** El vector que tiene la misma magnitud de $\boldsymbol{v}$ pero dirección opuesta se denomina "**negativo**" (o "**inverso aditivo**")

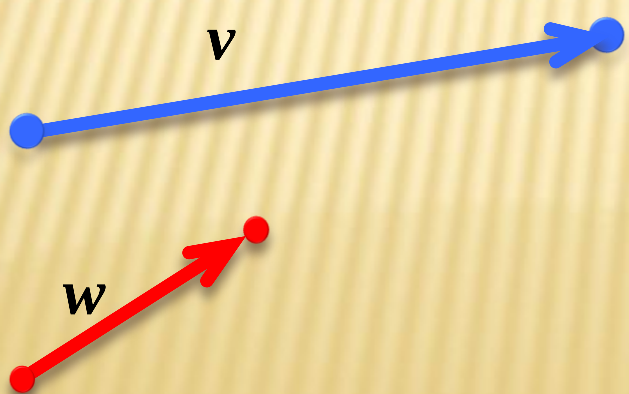
$$\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{v}$$

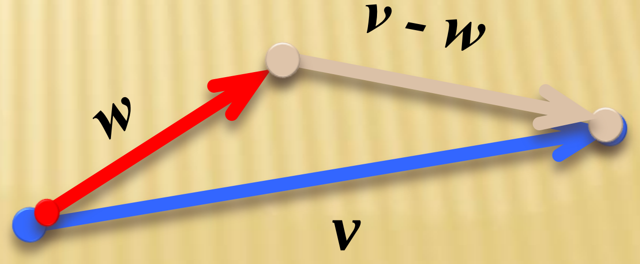
OPERACIONES CON VECTORES

- **DEF.** Si $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son dos vectores, entonces la **sustracción** $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ se define por:

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{w})$$

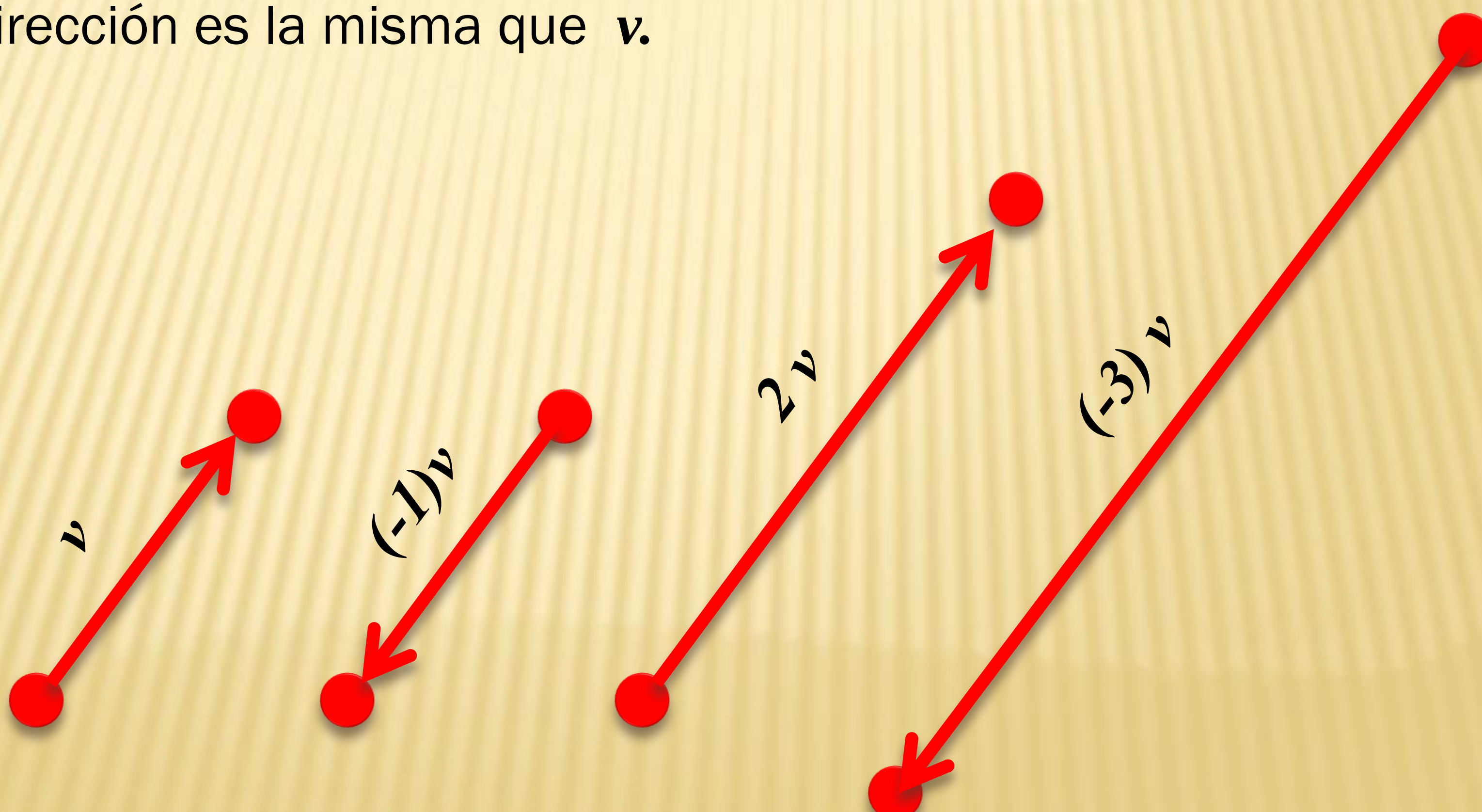
  - Colocar el vector $\boldsymbol{v}$ de tal manera que su punto inicial coincida con el punto inicial de $\boldsymbol{w}$.
  - El vector resultante estará representado por la flecha que va del punto terminal de $\boldsymbol{w}$ al punto terminal de $\boldsymbol{v}$





OPERACIONES CON VECTORES

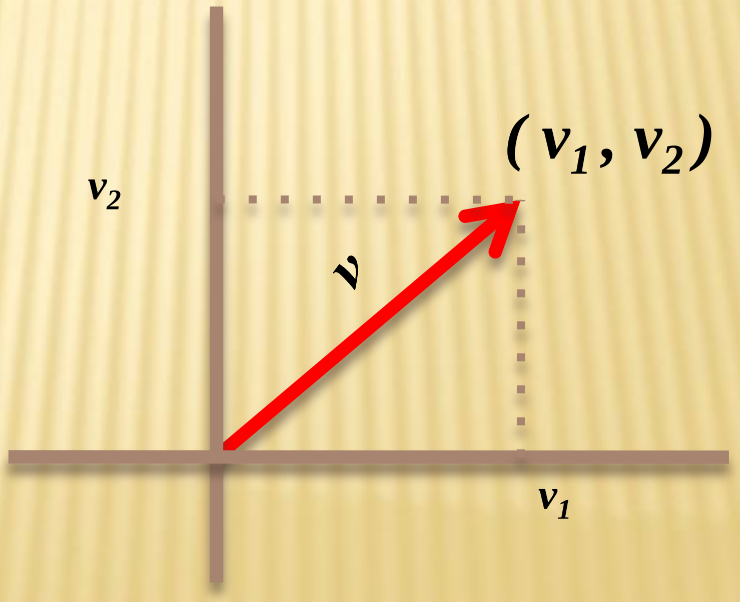
- **DEF.** Si v es un vector y k es un número escalar (real), entonces el **producto** $k\,v$ se define como el vector cuya longitud es $|k|$ multiplicado por la longitud de v y cuya dirección es la misma que v.



SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

- DEF. Si v cualquier vector en el plano y supóngase que se ha colocado de manera que su punto inicial quede en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares. Las coordenadas (v_1, v_2) del punto terminal de v se llaman *componentes de* v, y se escribe:

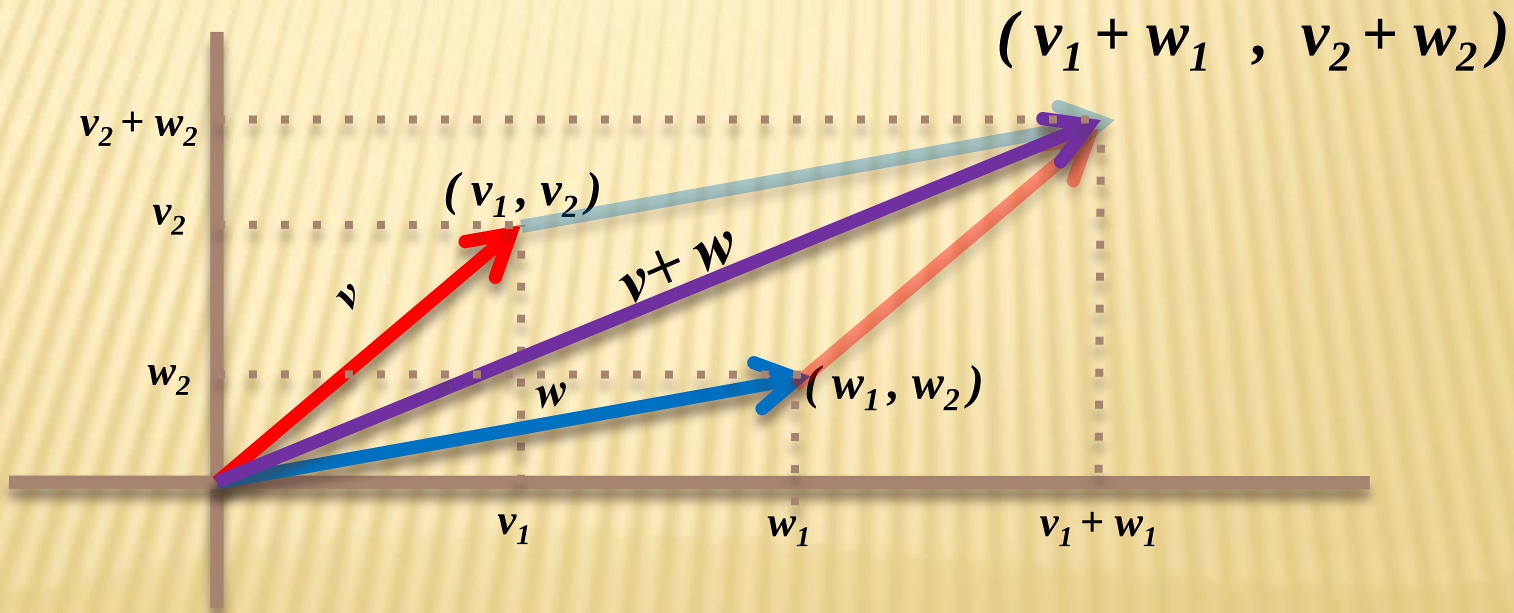
$$v = (v_1, v_2)$$



SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

- **OPERACIONES.** Sean v y w dos vectores, entonces la suma estará dada por: $v = (v_1, v_2)$ $w = (w_1, w_2)$

$$v + w = (v_1 + w_1 , v_2 + w_2)$$



SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

- OPERACIONES. Si $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$ **y** $\boldsymbol{k}$ es un escalar cualquiera entonces $\boldsymbol{kv} = (\boldsymbol{kv_1}, \boldsymbol{kv_2})$

A veces surgen vectores que no tienen sus puntos iniciales en el origen. Supongamos un vector $\boldsymbol{P_1P_2}$ en el plano:

Bidimensional: tiene el punto inicial $\boldsymbol{P_1 (x_1, y_1)}$ y el punto terminal $\boldsymbol{P_2(x_2, y_2)}$, entonces el vector sería:

$$\boldsymbol{P_1 P_2 = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)}$$

Tridimensional: tiene el punto inicial $\boldsymbol{P_1 (x_1, y_1, z_1)}$ y el punto terminal $\boldsymbol{P_2(x_2, y_2, z_2)}$, entonces el vector sería:

$$\boldsymbol{P_1 P_2 = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)}$$

NORMAS DE UN VECTOR

- TEOREMA 1. Si ***u*, *v*** y ***w*** son vectores en el espacio R^2 o R^3, y ***k*** y ***l*** son dos escalares cualesquiera, entonces se cumplen las relaciones siguientes:

a) u + v = v + u
b) (u + v) + w = u + (v + w)
c) u + 0 = 0 + u = u
d) u + (-u) = 0
e) ***k*** (***l*** u) = (***k l***) u
f) ***k*** (u + v) = ***k*** u + ***k*** v
g) (***k*** + ***l***) u = ***k*** u + ***l*** u
h) 1 u = u

NORMAS DE UN VECTOR

A la longitud de un vector $\boldsymbol{v}$ se de da el nombre de **norma** de $\boldsymbol{v}$ y se le denota por $\|\boldsymbol{v}\|$ y esta se obtiene del teorema de Pitágoras quedando su formula como:

Para un espacio R^2

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Para el espacio R^3

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

La ***distancia*** de un vector que no tiene su punto inicial en el origen se obtiene de:

Para un espacio R^2

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Para el espacio R^3

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

PRODUCTO ESCALAR (PRODUCTO PUNTO)

Sean ***u*** y ***v*** dos vectores diferente de 0 (CERO) en los espacios R^2 o R^3 y supóngase que se han situado estos vectores de modo que sus puntos iniciales coincidan. Se dirá que el ángulo entre ***u*** y ***v*** es el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ determinado por ***u*** y ***v*** que satisface $0 \leq \boldsymbol{\theta} \leq$ ¶, entonces el ***producto escalar (punto) o producto euclidiano interior*** ***u* • *v*** se define por:

$$u \bullet v = \begin{cases} \|u\| \, \|v\| \cos\theta & \text{si } u \neq 0 \text{ y } v \neq 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \text{ y } v = 0 \end{cases}$$

PRODUCTO ESCALAR (PRODUCTO PUNTO)

El ***producto punto*** $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}$ también puede obtenerse de la siguiente manera:

Para R^2 $\quad u \bullet v = \boldsymbol{u_1 v_1} + \boldsymbol{u_2 v_2}$

Para R^3 $\quad u \bullet v = \boldsymbol{u_1 v_1} + \boldsymbol{u_2 v_2} + \boldsymbol{u_3 v_3}$

- **TEOREMA 2**. Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son vectores en el espacio R^2 o R^3,

a) $\mathbf{v \bullet v = \|v\|^2}$; es decir $\|v\| = (v \bullet v)^{1/2}$

b) Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son diferentes de cero y θ es el ángulo entre ellos, entonces

θ **es agudo** si y sólo si $\mathbf{u \bullet v > 0}$

θ **es obtuso** si y sólo si $\mathbf{u \bullet v < 0}$

θ **es ¶/2** si y sólo si $\mathbf{u \bullet v = 0}$

PRODUCTO ESCALAR (PRODUCTO PUNTO)

- TEOREMA 3. Si $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son vectores en el espacio R^2 o R^3, y $\boldsymbol{k}$ es un escalar, entonces:

a) $u \bullet v = v \bullet u$

b) $u \bullet (v + w) = u \bullet v + u \bullet w$

c) $\boldsymbol{k}(u \bullet v) = (\boldsymbol{k}\,u) \bullet v = u \bullet (\boldsymbol{k}\,v)$

d) $v \bullet v > 0$ si $v \neq 0$ y $v \bullet v = 0$ si $v = 0$

PRODUCTO ESCALAR (PRODUCTO PUNTO)

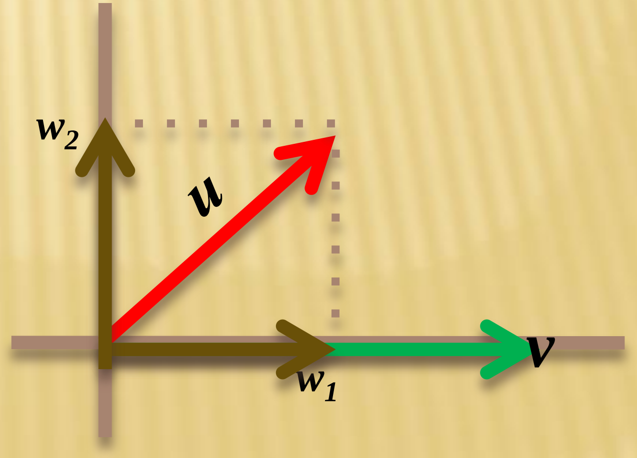
ORTOGONALIDAD Se define a dos vectores $\boldsymbol{u}$ **y** $\boldsymbol{v}$ como ortogonales ($\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$) si $u \bullet v = 0$. Es decir que dos vectores son ortogonales si y sólo si son geométricamente perpendiculares. Por lo tanto , si dos vectores son diferentes de cero entonces siempre es posible escribir al vector ***u*** como

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

en donde $\mathbf{w}_1$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}_2$ es perpendicular a **v.**

$\mathbf{w}_1$ se le llama ***proyección ortogonal de u sobre v***

$\mathbf{w}_2$ es la ***componente de u ortogonal a v.***



PRODUCTO ESCALAR (PRODUCTO PUNTO)

Los vectores $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ se pueden obtener de

Proyección ortogonal de **u** sobre **v**

$$w_1 = \frac{u \bullet v}{\|v\|^2} v$$

Recordando que $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$

entonces sustituyendo a $\mathbf{w}_1$ y despejando a $\mathbf{w}_2$

Componente de **u** ortogonal a **v**

$$w_2 = u - \frac{u \bullet v}{\|v\|^2} v$$

PRODUCTO VECTORIAL (PRODUCTO CRUZ)

Si *u =(u_1, u_2, u_3)* y *v = (v_1, v_2, v_3)* son vectores en el espacios R^3 entonces el ***producto vectorial (cruz)*** ***u*** X ***v*** es el valor definido por:

$$u \times v = \left(u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1\right)$$

O en su notación de determinante

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

PRODUCTO VECTORIAL (PRODUCTO CRUZ)

- **TEOREMA 4.** Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son vectores en el espacio R^3, entonces:

a) $u \bullet (u \times v) = 0$ ($u \times v$ es ortogonal a u)

b) $v \bullet (u \times v) = 0$ ($u \times v$ es ortogonal a v)

c) $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \bullet v)^2$ Identidad de Lagrange

d) $u \times (v \times w) = (u \bullet w)v - (u \bullet v)w$

e) $(u \times v) \times w) = (u \bullet w)v - (v \bullet w)u$

PRODUCTO VECTORIAL (PRODUCTO CRUZ)

- TEOREMA 5. Si ***u***, ***v*** y ***w*** son vectores en el espacio R^3 y ***k*** es un escalar, entonces:

a) $u \times v = -(v \times u)$
b) $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$
c) $(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$
d) $k(u \times v) = (ku) \times v = u \times (kv)$
e) $u \times 0 = 0u = 0$
f) $u \times u = 0$

ESPACIO EUCLIDIANO

Sean $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ y $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ dos vectores en el espacio R^n, y $\boldsymbol{k}$ es un escalar, entonces….

la suma estará dada por:

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \ldots, u_n + v_n)$$

La multiplicación de un escalar por algún vector estará dada por:

$$\boldsymbol{ku} = (ku_1, ku_2, ku_3, \ldots, ku_n)$$

El inverso aditivo o el negativo de un vector esta dado por:

$$-\boldsymbol{u} = (-u_1, -u_2, -u_3, \ldots, -u_n)$$

ESPACIO EUCLIDIANO

la diferencia de vectores estará dada por:

$\boldsymbol{u - v = (u_1 - v_1 , u_2 - v_2 , u_3 - v_3 , \ldots , u_n - v_n)}$

o

$\boldsymbol{u - v = u + (-v)}$

El producto interior euclidiano vector estará dada por:

$\boldsymbol{u \bullet v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \ldots + u_n v_n}$

O

$$u \bullet v = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2$$

ESPACIO EUCLIDIANO

la norma euclidiana estará dada por:

$$\|u\| = (u \bullet u)^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_n^2}$$

Y la distancia euclidiana esta dada por:

$$\mathrm{d(u, v)} = \|u - v\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}$$

Representación matricial de vectores en R^n

$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}, \ldots, \boldsymbol{u_n})$ ⇒

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \ldots \\ u_n \end{bmatrix}$$

ESPACIO EUCLIDIANO

Representación matricial del ***producto punto*** en R^n $\quad u \bullet v = v^T u$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \ldots \\ u_n \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \ldots \\ v_n \end{bmatrix} \qquad v^T u = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \ldots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \ldots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Si A es una matriz $n \times n$ y $\boldsymbol{u \bullet v = v^T u}$ se concluye que:

$\boldsymbol{A \quad u \bullet v = u \bullet A^T v}$

$\boldsymbol{u \bullet Av = A^T u \bullet v}$

ESPACIO EUCLIDIANO

Si A es una matriz $n \times n$ y $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{u}$ se concluye que:

$$A \quad \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u} \bullet A^T \mathbf{v}$$

$$\mathbf{u} \bullet A\mathbf{v} = A^T \mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$$